PROBLEMA 2: CILINDRO CON DENSIDAD SUPERFICIAL DE CARGA

Se tiene un cilindro hueco, de longitud infinita en *z* y radio *R*, el cual tiene sobre su superficie una carga cuya densidad superficial es $\eta(\varphi) = \eta_0 \operatorname{sen}(2\varphi)$. Determina el potencial electrostático producido por esta distribución de cargas en el vacío.

Solución

Por la geometría del sistema, el potencial depende de las coordenadas ρ y φ. En el problema hay dos regiones (Región 1: $\rho > R$, región 2: $\rho < R$). Se requieren cuatro condiciones de frontera, que son:

a) $\lim\limits_{\rho\to\infty} \phi_1(\rho,\varphi) = 0$

b) $\lim\limits_{\rho\to 0} \phi_2(\rho,\varphi) \neq \infty$

c) $\phi_1(R^+,\varphi) = \phi_2(R^-,\varphi)$

d) $-\varepsilon_0\left(\left.\dfrac{\partial\phi_1}{\partial\rho}\right|_{R^+} - \left.\dfrac{\partial\phi_2}{\partial\rho}\right|_{R^-}\right) = \eta_0 \operatorname{sen}(2\varphi)$

Nótese que en este problema están presentes las condiciones de frontera para el eje z y para el infinito. Además, dado que la frontera $\rho = R$ es común para las dos regiones, hay dos condiciones de frontera allí: la de continuidad del potencial (condición c) y la de las cargas libres superficiales (condición d). Nótese también que sólo hay dos condiciones de frontera por región, a pesar de que el potencial electrostático depende de dos coordenadas. Esto se debe a que la geometría de cada región depende sólo de la coordenada radial.

Por la condición d, la solución es la general, con $k(n) = 2$ y función seno, e independiente de *z*. Esto se debe a que las derivadas parciales respecto a la coordenada radial de la condición de frontera no afecta a la dependencia del potencial respecto a las coordenadas φ y z.

A continuación se postulan los potenciales para las dos regiones (tomando la solución general, con $k(n) = 2$ y función seno, e independiente de z):

$$\phi_1(\rho,\varphi) = \left(A\rho^2 + B\rho^{-2}\right)\mathrm{sen}(2\varphi)$$

$$\phi_2(\rho,\varphi) = \left(C\rho^2 + D\rho^{-2}\right)\mathrm{sen}(2\varphi)$$

Para que cumpla la condición a debe hacerse A=0, para cumplir con la condición b debe hacerse D=0, para cumplir con la condición c debe tenerse $BR^{-2} = CR^2$, y para cumplir la condición d debe cumplirse $\varepsilon_0[2BR^{-3} + 2CR] = \eta_0$. Al resolver el sistema de ecuaciones para B y C, se tiene finalmente:

$$\phi_1(\rho,\varphi) = \frac{\eta_0 R}{4\varepsilon_0}\left(\frac{R}{\rho}\right)^2 \mathrm{sen}(2\varphi)$$

$$\phi_2(\rho,\varphi) = \frac{\eta_0 R}{4\varepsilon_0}\left(\frac{\rho}{R}\right)^2 \mathrm{sen}(2\varphi)$$